

Електродинаміка 2023- 3 курс

Лекція № 1

Вступ

Закони електродинаміки, як і інші фізичні закони, встановлюються на основі узагальнення експериментальних даних.

Курс складається із двох частин.

1. Класична теорія поля вивчає електромагнітні явища у вакуумі. Це мікроскопічна теорія. Її основні рівняння – рівняння Максвелла.
2. Електродинаміка суцільних середовищ – макроскопічна теорія. Займається вивченням електромагнітних полів у середовищі, яке розглядається, як суцільне. Ми нехтуємо атомною структурою та дискретним розподілом заряду та струму, усереднюємо значення напруженості електричного та магнітного полів в рівняннях Максвелла по фізично нескінченно малих об'ємах. Вигляд рівнянь буде залежати від властивостей середовища (метал, діелектрик), від характеру поля (постійне, змінне).

Існує два підходи до викладання електродинаміки.

1. Спочатку сформулювати експериментально знайдені закони (Кулона (1785), Біо-Савара (1820), ввести силу Ампера (1820), закон електромагнітної індукції (1831)). Далі узагальнити ці закони та записати основні рівняння електродинаміки – рівняння Максвелла. Потім вже на основі рівнянь Максвелла розглядаються окремі випадки – електростатика, магнітостатика, електромагнітні хвилі. Встановлюється той факт, що рівняння Максвелла не задовольняють перетворенням Галілея (змінюється їх вигляд при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої). Знаходяться нові перетворення – перетворення Лоренца, відносно яких рівняння Максвелла залишаються інваріантними. Формулюється принцип відносності Ейнштейна, який базується на постулаті про скінченність швидкості розповсюдження електромагнітних взаємодій. Будується спеціальна теорія відносності та релятивістська механіка. Так побудовано курс загальної фізики.
2. З самого початку електродинаміка будується, як послідовно релятивістська теорія. Формулюється принцип найменшої дії (варіаційний принцип), будується функція дії для електромагнітного поля та виводяться рівняння Максвелла з варіаційного принципу відразу, як релятивістсько інваріантні рівняння. Саме так побудовано курс «Теорія поля» Ландау–Ліфшиця та багато інших сучасних курсів електродинаміки. Ми обираємо саме такий підхід, бо

від більш економічний та більш надійний. З лагранжевою та гамільтоновою механікою студенти 3 курсу вже знайомі.

Система одиниць.

Для рівнянь Максвелла більш зручною й природною є абсолютна система одиниць Гауса, а не Міжнародна система одиниць (SI – System International).

Ми знаємо, що електромагнітне поле – це єдине поле. В гаусовській системі одиниць напруженості електричного та магнітного полів вимірюються в однакових одиницях. Для заряду та струму немає додаткових одиниць. Але так сталося, що коли рівняння Максвелла були записані наприкінці 18 сторіччя, вже були введені випадково обрані технічні одиниці вимірювання – Ампер, Кулон, Вольт ніяк не пов'язані із законами електродинаміки. Щоб поєднати технічні одиниці та рівняння Максвелла довелося значно погіршити систему одиниць SI, в якій напруженості електричного та магнітного полів, електрична та магнітна індукції $\vec{E}, \vec{H}$, $\vec{D}, \vec{B}$, які всі є величинами однієї природи, усі (!) мають різні одиниці вимірювання! Ще вводяться додаткові коефіцієнти ϵ_0 та μ_0 – електрична та магнітна сталі, які не мають фізичного значення.

Нагадаємо, що швидкість світла у вакуумі $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

Ми будемо працювати у гаусовій системі одиниць.

(special – частинна)

СТВ, на якій базується викладання релятивістської механіки та електродинаміки, була створена на початку 20 сторіччя. А. Ейнштейном, Г. Лоренцем, А. Пуанкаре, Г. Мінковським, М. Планком та ін. В її основі в свою чергу лежать уяви про властивості простору, часу та руху, які застосовуються у класичній ньютонівській механіці, але критично проаналізовані та перероблені у зв'язку із новими дослідними даними у галузі електромагнітних явищ у середовищах, що рухаються.

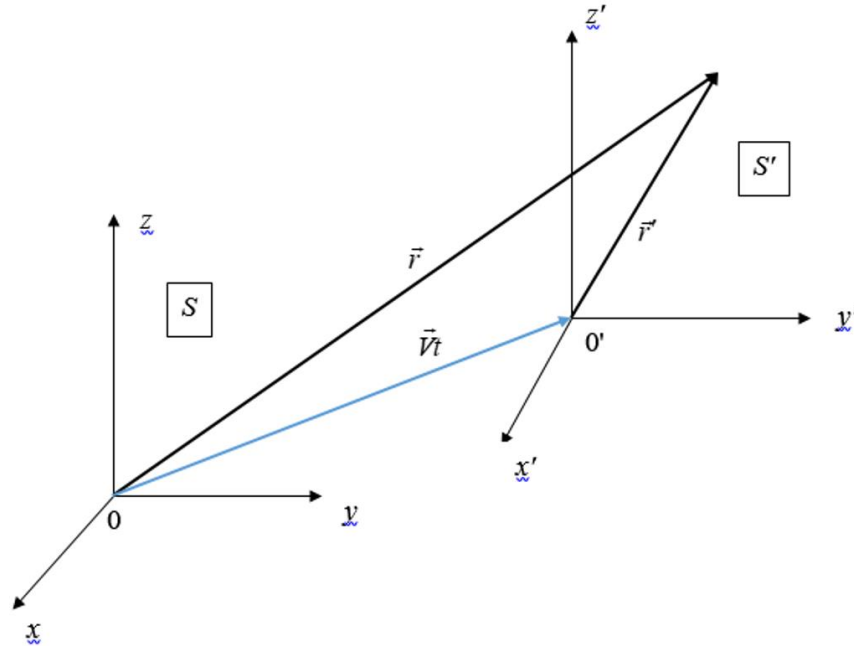
1.1. Принцип відносності Галілея. Перетворення Галілея

Для опису процесів у природі треба мати систему відліку. Система відліку – це система координат, що служить для визначення положення тіл у просторі, та годинник, який зв'язаний з цією системою координат, для визначення часу. Є такі системи відліку, в яких вільний рух тіл, тобто рух тіл, на які не діють інші тіла, відбувається зі сталою (постійною) швидкістю. Такі системи відліку називаються інерціальними системами відліку (ICB). Таких

систем нескінченно багато. Якщо ми постулюємо існування хоча б однієї ІСВ, тоді будь-яка система відліку, яка рухається зі сталою швидкістю відносно даної, також є інерціальною.

Перший закон Ньютона – закон інерції саме й постулює існування інерціальних систем відліку.

Перетворення Галілея



Нехай система відліку S' рухається відносно системи S зі сталою швидкістю $\vec{V}$. Координати певної точки простору, в якій відбувається певна подія в певний момент часу в системі S – $\vec{r} = (x, y, z), t$, в системі S' – $\vec{r}' = (x', y', z'), t'$ відповідно. Як показує досвід, існує векторне правило додавання радіус-векторів $\vec{r}$ та $\vec{r}'$:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t' \quad (1.1)$$

Крім того, в класичній механіці час є єдиним для всіх систем відліку:

$$t = t' \quad (1.2)$$

Формули (1.1) та (1.2) мають назву перетворень Галілея.

З (1.1) та (1.2) випливає закон додавання швидкостей:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}; \quad dt = dt'; \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{V} = \frac{d\vec{r}'}{dt'} + \vec{V}; \\ \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{V}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Швидкості додаються векторно й необмежені за абсолютною величиною. Закон додавання швидкостей є наслідком перетворень Галілея. Звернемо увагу на те, що час не перетворюється, в усіх ІСВ протікає однаково та має абсолютних характер. Простір є відносним (координати точки залежать від вибору системи відліку).

В ІСВ всі закони фізики формулюються найбільш просто. В ІСВ у відсутності матеріальних тіл та полів простір є однорідним (всі точки простору еквівалентні), ізотропним (усі напрямки еквівалентні), час є однорідним (усі відрізки часу рівноправні). Можна обрати за початок координат будь-яку точку простору, осі координат орієнтувати довільним чином, а початок відліку часу розпочати у будь-який момент. Від цього не повинні залежати формули, які описують закони фізики. В класичній механіці – це рівняння руху – другий закон Ньютона. Прискорення та сили є однаковими в усіх інерціальних системах відліку.

Беремо похідну по часу від (1.3)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt'}; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}; \quad \vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'};$$

Прискорення не залежить від вибору системи відліку

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad (1.4)$$

Сила в класичній механіці залежить тільки від взаємного розташування взаємодіючих тіл в один і той же момент часу. Взаємодії передаються миттєво. В класичній механіці використовується поняття далекодії – миттєвої дії на будь-якій відстані. Якщо положення одного тіла у просторі змінилося, то всі інші тіла відчують цю зміну миттєво. Це означає, що

$$\vec{F} = \vec{F}'.$$

Рівняння руху у будь-якій ІСВ має однаковий вигляд, тобто є інваріантним відносно перетворень Галілея.

$$m\vec{a} = \vec{F}; \quad m\vec{a}' = \vec{F}'. \quad (1.5)$$

Всі інерціальні системи відліку є еквівалентними відносно законів класичної механіки. Закони класичної механіки є інваріантними відносно перетворень Галілея. Це твердження називають принципом відносності Галілея.

Принцип відносності Галілея:

1. Закони класичної механіки однакові в усіх їх системах відліку.
2. Швидкість розповсюдження взаємодій нескінченна.

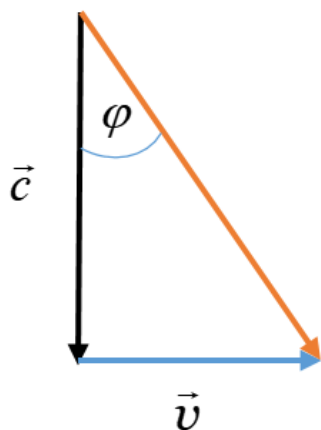
Однаковість законів механіки означає, що відповіді формули інваріантні відносно перетворень Галілея.

Електромагнітні явища описуються рівняннями Максвелла, в які входить стала c – швидкість розповсюдження електромагнітних взаємодій. Ці рівняння не зберігають свій вигляд при перетвореннях Галілея, тобто не інваріантні відносно цих перетворень. Наприкінці 19 сторіччя сумнівів у правильності рівнянь Максвелла вже не було. Довелося переглянути перетворення Галілея та положення про нескінченність швидкості розповсюдження електромагнітних взаємодій.

1.2. Експерименти, які лежать в основі СТВ

1. Вперше швидкість світла була виміряна шведським астрономом Олафом Рьомером. Його спостереження за затемненнями супутників Юпітера показали, що видимий період їх обертання навколо Юпітера зменшується, коли Земля у своєму річному обертанні наближається до Юпітера та збільшується, коли земля віддаляється від Юпітера. Рьомер пояснив це явище, як ефект скінченності швидкості світла та по результатам досліджень вирахував цю швидкість. Отриманий результат був приблизно 214300 км/с.

2. Аберация світла. (Брадлей, 1727)



Внаслідок додавання швидкості руху Землі $\vec{v}$ та швидкості світла $\vec{c}$ видимий напрямок на зірку відрізняється від справжнього. Кут аберации φ визначається, як

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{c}.$$

За рахунок аберации протягом року зображення зірки опише еліпс. По φ та v можна визначити швидкість світла c . (Аберацию спостерігаємо, коли бачимо падіння крапель дощу на скло вікон потягу, що рухається)

3. Досліди Майкельсона–Морлі (1881, 1887, 1905) довели, що середня швидкість світла у двох протилежних напрямках в даній інерціальній системі відліку однакова. Зробити з цього висновок, що швидкість світла однакова в різних напрямках не можна, тільки висновок про те, що швидкість світла не залежить від швидкості руху спостерігача.

4. Спостереження за подвійними зірками. В 1913 р. де Сіттер вперше вказав на те, що спостереження за подвійними зірками підтверджують гіпотезу про сталість швидкості світла та незалежність її від швидкості руху джерела.

5. Для визначення періоду обертання зірки-супутника використовують ефект Доплера (1842). Якщо $c = \text{const}$, то частота випромінювання ω залежить від швидкості руху джерела випромінювання (колір світла залежить від швидкості й напрямку руху джерела)

6. Наближений характер закону додавання швидкостей Галілея (ф-ла (1.3)) було встановлено в досліді Фізо (1860) по вимірюванню швидкості світла у воді, що рухається. Нагадаємо, що в середовищі

$$v = \frac{c}{n},$$

де n – показник заломлення води.

7. Катодні промені, які були відкриті в 1897р., тобто електрони, як виявилось, рухаються в електричному та магнітному полях не зовсім так, як передбачено законами класичної механіки.

1.3. Принцип відносності Ейнштейна

1. Досвід показує, що має місце принцип відносності: всі закони природи однакові в усіх інерціальних системах відліку (ICB). Тобто, рівняння, якими описуються ці закони інваріантні відносно перетворень координат та часу при переході від однієї ICB до іншої.

Це положення збігається з принципом відносності Галілея, але розповсюджується на всі закони природи, а не тільки закони Ньютона (зауважимо, що в часи Галілея інших законів ще не було знайдено)

2. Друге ствердження, яке відрізняє принцип відносності Галілея від принципу відносності Ейнштейна, це скінченність швидкості розповсюдження взаємодій. З першого положення однозначно випливає, що швидкість розповсюдження взаємодій не тільки скінченна, але й однакова в усіх ICB (всі ICB рівноправні). Таким чином швидкість розповсюдження взаємодій є універсальною сталою. Як буде показано далі, вона дорівнює швидкості розповсюдження світла у вакуумі:

$$c = 2.997925 \cdot 10^8 \text{ м / с} . \quad (1.6)$$

Швидкість світла набагато більша швидкостей, з якими ми маємо справу в класичній механіці, тому положення про її нескінченність в ньютонівській механіці не впливає на точність результатів.

Сформулюємо ще раз принцип відносності Ейнштейна:

1. Всі закони природи однакові в усіх інерціальних системах відліку.

2. Швидкість розповсюдження взаємодій скінченна та однакова в усіх інерціальних системах відліку.

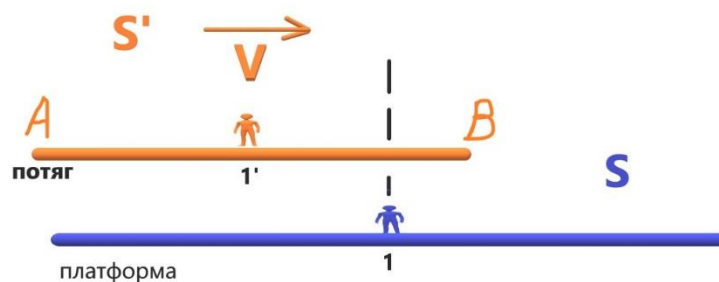
Механіка, яка заснована на принципі відносності Ейнштейна називається релятивістською. В граничному випадку $c \rightarrow \infty$ вона повинна переходити в класичну механіку.

Згідно з принципом відносності Ейнштейна ми повинні кардинально переглянути наші уявлення про простір та час.

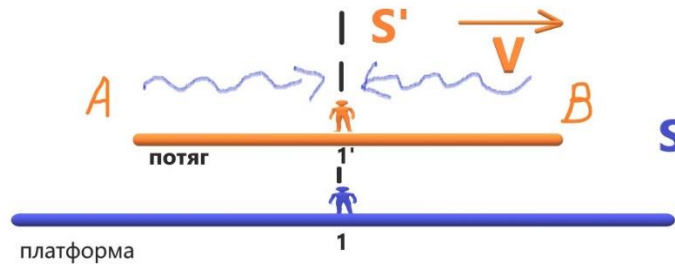
В класичній механіці простір є відносним – просторові відстані між подіями $\Delta \vec{r}$, $\Delta \vec{r}'$ залежать від вибору ІСВ, тобто є відносними. Ствердження про те, що дві різночасові події відбулися в одному й тому ж місці або на певній відстані треба пов'язувати з конкретною ІСВ. Час в класичній механіці є абсолютним. Часові проміжки між подіями однакові в усіх ІСВ $\Delta t = \Delta t'$. Одночасність та проміжки часу є абсолютними. В релятивістській механіці це положення не виконується. Час стає також відносним.

Розглянемо «уявний» експеримент. Цей уявний дослід зазвичай називають «потяг Ейнштейна».

Спостерігач 1 знаходиться на нерухомій платформі в ІСВ. Спостерігач 1' – в середині потягу довжини АВ: $A1'=1'B$. Потяг рухається зі сталою швидкістю V відносно платформи.



Коли середина потягу проходила повз середину платформи, спостерігачі 1 та 1' одночасно отримали світлові сигнали, які були послані з обох кінців потягу.



Чи одночасно були послані ці сигнали?

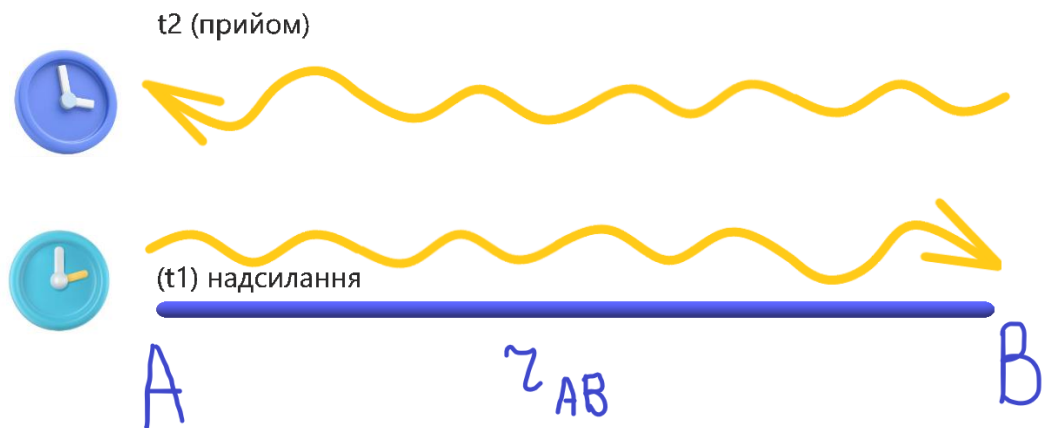
Точка зору спостерігача 1', який знаходиться у системі відліку S' , яка рухається разом із потягом. Відстані $A1'$ та $1'B$ однакові, сигнали отримані одночасно, швидкість їх розповсюдження однакова для обох сигналів. Це означає, що й послані вони були одночасно: $t'_A = t'_B$.

Точка зору спостерігача 1, який знаходиться у системі відліку S на нерухомій платформі. Сигнали я отримав одночасно. Коли сигнали були послані, відстань $A1$ була більше, ніж $1B$. Сигналу з точки A потрібно пройти до мене більшу відстань (ніж сигналу з точки B), на це потрібно більше часу. Сигнал з точки A було послано раніш ніж з точки B : $t_A < t_B$.

Обидва спостерігачі праві, бо в СТВ час також є відносним – одночасність та проміжки часу відносні. Це неминучий наслідок скінченності швидкості розповсюдження взаємодій.

Треба сказати, що згідно з класичним законом додавання швидкостей (1.3) швидкість розповсюдження взаємодій була б різною в різних ІСВ. Це ствердження протирічить принципу відносності Ейнштейна та результату відомого досліду Майкельсона (1881). Дослід Майкельсона довів повну незалежність швидкості світла від напрямку його розповсюдження на руховій Землі. (Пізніше Ейнштейн писав, що його часто питають, який вплив оказав на нього при створенні СВВ дослід Майкельсона. Ейнштейн відповідав, що навіть не пам'ятає, чи знав він тоді про цей дослід, що виходив з інших положень).

Одним з центральних пунктів аналізу Ейнштейном властивостей часу є синхронізація годинників, тобто встановлення єдиного часу в межах даної ІСВ. Таку синхронізацію виконуємо за допомогою світлових сигналів.



Час розповсюдження від А до В та від В до А однаковий:

$$\begin{cases} t_1 = t_B - \frac{r_{AB}}{c}; \\ t_2 = t_B + \frac{r_{AB}}{c}. \end{cases}$$

$$t_B = \frac{1}{2}(t_1 + t_2). \quad (1.7)$$

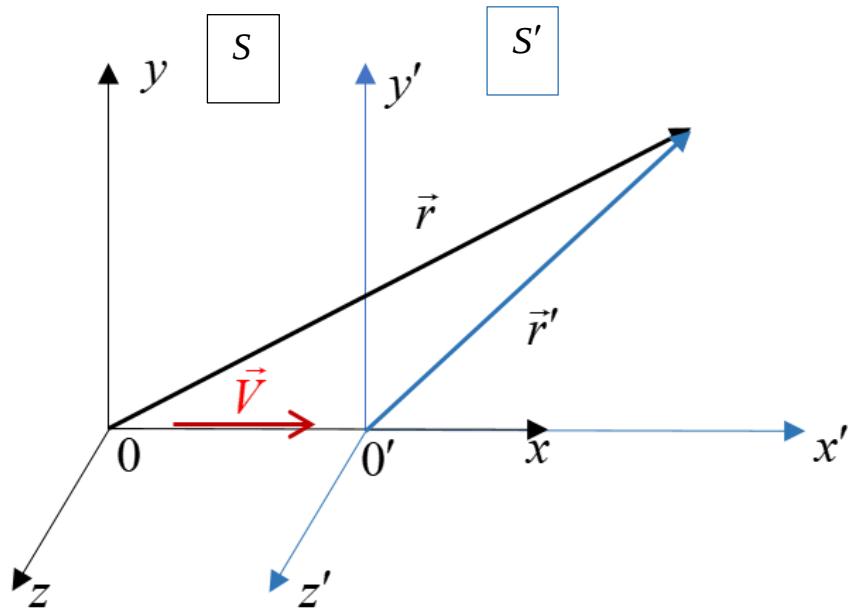
t_B – це положення, в яке треба поставити стрілку годинника в точці В в момент прийому сигналу, який було надіслано з точки А. Точки А та В можна поміняти місцями – послати сигнал з точки В та синхронізувати годинник в точці А. Так саме треба погодити показання усіх годинників, які є нерухомими в деякій інерціальній системі відліку. Всі вони будуть показувати один та той же час. Як показав вже уявний експеримент зі спостерігачами у потягу та на платформі, в різних ІСВ синхронізувати нерухомий годинник ($t'_A = t'_B$) та годинник, що рухається ($t_A < t_B$) не можна: $t' \neq t$!

1.4. Перетворення Лоренца

Перетворення Галілея (1.1)-(1.2) не задовольняють принципу відносності Ейнштейна. Перетворення, які здійснюють перехід від однієї ІСВ до іншої слід переглянути з урахуванням скінченності швидкості розповсюдження світла та відносності простору та часу.

Перетворення, які пов'язують координати та час події в ІСВ $S(\vec{r}, t)$ та в ІСВ $S'(\vec{r}', t')$ називаються перетвореннями Лоренца.

Сформулюємо, яким вимогам повинні задовольняти ці перетворення. Нехай для спрощення викладок ІСВ S' рухається відносно ІСВ S у напрямку осі x , а осі координат паралельні.



Домовимось, що в момент часу $t = t' = 0$ початки координат обох систем співпадали: $x = y = z = 0, x' = y' = z' = 0$.

Зв'язок між x, y, z, t та x', y', z', t' повинен бути лінійним (це наслідок однорідності простору в ІСВ). Оскільки рух S' відносно S відбувається тільки у напрямку осі Ox ($O'x'$), $y = y' = 0$ та $z = z' = 0$, то точка водночас знаходиться у площині xOy та $x'O'y'$ або xOz та $x'O'z'$. Це можливо, коли

$$y' = ky, \quad z' = kz.$$

Лінійний зв'язок між x', t' та x, t напишемо так

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta t + \alpha' y + \beta' z; \\ t' = \sigma x + \delta t + \sigma' y + \delta' z. \end{cases} \quad (1.8)$$

Нехай $x = x' = 0, t = t' = 0$. З (1.8) випливає, що

$$\begin{cases} \alpha' y + \beta' z = 0; \\ \sigma' y + \delta' z = 0. \end{cases}$$

Для будь-яких значень координат y, z це можливо тільки, якщо $\alpha' = \beta' = \sigma' = \delta' = 0$. Маємо замість (1.8)

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta t; \\ t' = \sigma x + \delta t. \end{cases} \quad (1.9)$$

Для руху точки O' матимемо в двох системах відліку (система S' рухається відносно S у додатному напрямку осі x зі сталою швидкістю V)

$$x' = 0, x = Vt$$

Підставимо ці значення в перше з рівнянь (1.9) та отримаємо співвідношення між α, β та V

$$0 = \alpha Vt + \beta t = (\alpha V + \beta)t; \quad \beta = -\alpha V.$$

З другого рівняння (1.9) видно, що умова $t' = 0$ $x = 0, t = 0$ виконана. Маємо такі рівняння

$$\begin{cases} x' = \alpha(V)(x - Vt); \\ y' = k(V)y; \\ z' = k(V)z; \\ t' = \sigma(V)x + \delta(V)t. \end{cases} \quad (1.10)$$

Невідомі поки коефіцієнти $\alpha, \sigma, \delta, k$ можуть залежати від швидкості V , що ми й відмітили в (1.10).

ІСВ S та S' абсолютно рівноправні, тому формули для переходу від S до S' повинні відрізнитися від (1.10) тільки заміною V на $-V$

$$\begin{cases} x = \alpha(-V)(x' + Vt'); \\ y = k(-V)y'; \\ z = k(-V)z'; \\ t = \sigma(-V)x' + \delta(-V)t'; \end{cases} \quad (1.11)$$

Простір в ІСВ є ізотропним, тому обидва напрямки V та $-V$ рівноправні. Це означає, що $k(-V) = k(V)$. Маємо

$$y = ky' = k^2 y; \quad z = kz' = k^2 z; \\ k^2 = 1; \quad k = \pm 1.$$

Обираємо однаковий напрямок осей y та y' , z та z' . Таким чином

$$y = y'; \quad z = z'.$$

Розглянемо тепер перетворення координати x

$$\begin{aligned} x &= \alpha(-V)[\alpha(V)(x - Vt) + V(\sigma(V)x + \delta(V)t)] = \\ &= \alpha(-V)[\alpha(V) + V\sigma(V)]x + \underbrace{\alpha(-V)V[-\alpha(V) + \delta(V)]}_{=0}t = x; \\ \alpha(V) &= \delta(V). \end{aligned}$$

Тепер в (1.10)

$$\begin{cases} x' = \alpha(V)(x - Vt); \\ y' = y; \\ z' = z; \\ t' = \sigma(V)x + \alpha(V)t. \end{cases} \quad (1.12)$$

Згадаємо тепер про скінченність та інваріантність швидкості світла.

Нехай в момент часу $t = t' = 0$, коли початки координат обох ІСВ співпадали, з точок O та O' вийшов світловий сигнал – сферична хвиля. Фронт хвилі в ІСВ S рухається зі швидкістю світла $c = \frac{x}{t}$. Теж саме стосується ІСВ S' : $c = \frac{x'}{t'}$.

Знайдемо з формул (1.12) відношення $\frac{x'}{t'}$:

$$\begin{aligned} \frac{x'}{t'} &= \frac{\alpha(V)(x - Vt)}{\sigma(V)x + \alpha(V)t} = \frac{\cancel{\alpha(V)}(x - Vt)}{\cancel{\alpha(V)}\left(\frac{\sigma(V)}{\alpha(V)}x + t\right)} = \frac{(x - Vt)}{\left(\frac{\sigma(V)}{\alpha(V)}x + t\right)} = c; \\ &\quad \frac{(x - Vt)}{\left(\frac{\sigma(V)}{\alpha(V)}x + t\right)} = c. \end{aligned}$$

З іншого боку $x = ct$, тому

$$\begin{aligned} \frac{(ct - Vt)}{\left(\frac{\sigma(V)}{\alpha(V)}ct + t\right)} &= c; \quad \frac{(c - V)\cancel{t}}{\left(\frac{\sigma(V)}{\alpha(V)}c + 1\right)\cancel{t}} = c; \\ \frac{(c - V)}{\left(\frac{\sigma(V)}{\alpha(V)}c + 1\right)} &= c; \quad \cancel{t} - V = c\left(\frac{\sigma(V)}{\alpha(V)}c + \cancel{1}\right); \\ -V &= c^2 \frac{\sigma(V)}{\alpha(V)}; \quad \sigma(V) = -\frac{V}{c^2} \alpha(V). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x' = \alpha(V)(x - Vt); \\ y' = y; \\ z' = z; \\ t' = \alpha(V)\left(t - \frac{V}{c^2}x\right). \end{cases} \quad (1.13)$$

Залишилося знайти в (1.13) $\alpha(V)$. Напишемо рівняння фронту сферичної хвилі в обох ІСВ

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0; \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

та врахуємо, що $y = y', z = z'$:

$$y^2 + z^2 = c^2 t^2 - x^2; \quad y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 - x'^2;$$

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2;$$

$$x^2 - c^2 t^2 = \alpha^2 (x - Vt)^2 - c^2 \alpha^2 \left(t - \frac{V}{c^2} x \right)^2;$$

$$x^2 - c^2 t^2 = \alpha^2 \left(x^2 - 2xVt + V^2 t^2 \right) - c^2 \alpha^2 \left(t^2 - 2t \frac{V}{c^2} x + \frac{V^2}{c^4} x^2 \right);$$

$$x^2 - c^2 t^2 = \alpha^2 \left(x^2 + V^2 t^2 - c^2 t^2 - \frac{V^2}{c^2} x^2 \right);$$

$$x^2 - c^2 t^2 = \alpha^2 (x^2 - c^2 t^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right);$$

$$(x^2 - c^2 t^2) \left[\alpha^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) - 1 \right] = 0;$$

$$\alpha^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) - 1 = 0; \quad \alpha(V) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};$$

Обираємо знак «+», тобто знов однакові напрямки осей x x'

$$\alpha(\pm V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};$$

Отримали перетворення Лоренца для переходу від S до S'

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \\ y = y'; \\ z = z'; \\ t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

та для переходу від S' до S

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \\ y' = y; \\ z' = z; \\ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Для скорочення запису (1.14), (1.15) вводять такі позначення

$$\beta = \frac{V}{c}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad (1.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \gamma(x' + Vt'); \\ y = y'; \\ z = z'; \\ t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2} x'\right). \end{array} \right. \quad (1.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - Vt); \\ y' = y; \\ z' = z; \\ t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2} x\right). \end{array} \right. \quad (1.18)$$

У випадку малих швидкостей формули (1.17), (1.18) переходять у формули перетворень Галілея:

$$\frac{V}{c} \ll 1, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \approx 1; \quad \frac{V}{c^2} \rightarrow 0; \quad \begin{cases} x = x' + Vt'; \\ y = y'; \\ z = z'; \\ t = t'. \end{cases}$$

Якщо $V \rightarrow c$ то $\gamma \rightarrow \infty$ і перетворення Лоренца втрачають фізичне значення, бо макроскопічні тіла, з якими пов'язують ІСВ (початок відліку певної S' системи координат пов'язують із макроскопічним тілом відліку), не можуть досягати граничної швидкості c .

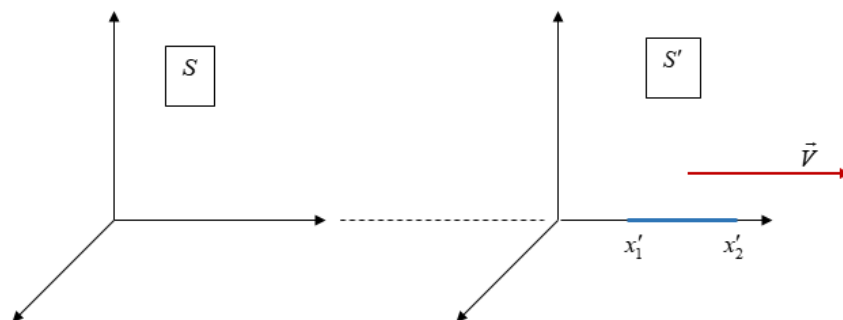
1.5. Наслідки з перетворень Лоренца

1.5.1. Обмеженість швидкості матеріальних тіл

Ми вже сказали, що матеріальні тіла не можуть рухатися зі швидкістю $(1.14)V \geq c$, бо тоді координата x та час t в (1.14) стають уявними величинами і перетворення Лоренца втрачають фізичне значення. Швидкість світла у вакуумі – гранична швидкість. Ніяке матеріальне тіло не може рухатися зі швидкістю, більшою за швидкість світла у вакуумі. Якщо маса тіла $m \neq 0$, то $v < c$ (побачимо з законів релятивістської механіки).

1.5.2. Скорочення довжини рухомого тіла у напрямку руху. Перетворення об'єму

Нехай в системі S' є нерухома лінійка на осі x' . Її довжина в цій системі відліку $l_0 = x'_2 - x'_1$. Ми цю довжину фіксуємо за умови $t'_2 = t'_1$ (одночасно в S').



Відносно системи S лінійка рухається зі сталою швидкістю V уздовж осі x . Виміряти довжину означає зафіксувати одночасно положення кінців. В системі S це буде так: $l = x_2 - x_1, t_2 = t_1$. Скористаємося перетвореннями Лоренца (1.15):

$$\begin{aligned}
x'_1 &= \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; & x'_2 &= \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; & x'_2 - x'_1 &= \frac{x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \\
t_2 &= t_1; & x'_2 - x'_1 &= l_0 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \\
l &= l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

З формули (1.19) випливає, що $l < l_0$, тобто довжина рухомого тіла скорочується у напрямку руху. Скорочення стає істотним, якщо швидкість V близька до швидкості світла c .

Масштаб, який орієнтовано перпендикулярно відносній швидкості, не скорочується: $y_1 = y'_1$, $y_2 = y'_2$, $z_1 = z'_1$, $z_2 = z'_2$, тому $\Delta y = \Delta y'$, $\Delta z = \Delta z'$. Об'єм тіла, що рухається, скорочується тільки за рахунок поздовжнього розміру:

$$\Omega = \Omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{1.20}$$

Тут Ω_0 та Ω – об'єми нерухомого та рухомого тіла відповідно.

Скорочення довжин та об'ємів є реальним, а не уявним. Вони встановлюються внаслідок вимірювання відстані між реальними зазначками (мітками), які фіксують положення кінців лінійки у вибраній ІСВ. $l \neq l_0$, бо $\Delta t' \neq 0$, коли $\Delta t = 0$ внаслідок відносності одночасності.

1.5.3. Відносність одночасності. Власний час

На прикладі «потягу Ейнштейна» ми вже знаємо, що в ІСВ поняття одночасності втрачає сенс. Розглянемо це питання кількісно.

Нехай в системі відліку S' з точок x'_A та x'_B ($x'_A < x'_B$) одночасно були надіслані світлові сигнали $t'_A = t'_B$. З точки зору спостерігача в системі S ці сигнали надіслані не одночасно. Скористаємося формулою для перетворення часу з (1.14):

$$t_A = \frac{t'_A + \frac{V}{c^2} x'_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad t_B = \frac{t'_B + \frac{V}{c^2} x'_B}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};$$

$$t_A - t_B = \frac{t'_A - t'_B + \frac{V}{c^2}(x'_A - x'_B)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};$$

$$t'_A = t'_B; \quad t_A - t_B = \frac{\frac{V}{c^2}(x'_A - x'_B)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = -\frac{\frac{V}{c^2}(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} < 0;$$

$$t'_A = t'_B; \quad t_A < t_B.$$

Робимо висновок, що дві події, які були одночасними в певній ІСВ, не будуть одночасними в усіх інших ІСВ.

Порівняємо тепер проміжки часу, які покажуть годинники в системах S та S' в разі, коли годинники є нерухомими у відповідних ІСВ, тобто $\Delta x' = 0, \Delta x = 0$. Маємо

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{V}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad \Delta x' = 0; \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};$$

Введемо позначення $\Delta t' = \tau$:

$$\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (1.21)$$

або

$$\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (1.22)$$

Формулою (1.22) можемо скористатися для нескінченно малих проміжків часу

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (1.23)$$

та розглянути випадок, коли об'єкт рухається зі змінною швидкістю $V = v(t)$:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}. \quad (1.24)$$

Система відліку, яка рухається разом з об'єктом в кожний момент часу називається миттєво супроводжуючою. Інтегруємо (1.24) по скінченному проміжку часу

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} < t_2 - t_1. \quad (1.25)$$

Коли в S' пройде час $t'_2 - t'_1$, в системі S пройде більший проміжок часу $t_2 - t_1$ згідно з (1.21) або (1.25). У рухомій системі відліку час уповільнюється. Час, який відлічується нерухомим годинником відносно деякого об'єкта в системі S' (тобто рухається зі швидкістю об'єкта з точки зору спостерігача в системі S), називається власним часом об'єкта. Проміжки власного часу найменші. Рухомий годинник йде повільніше ніж нерухомий.